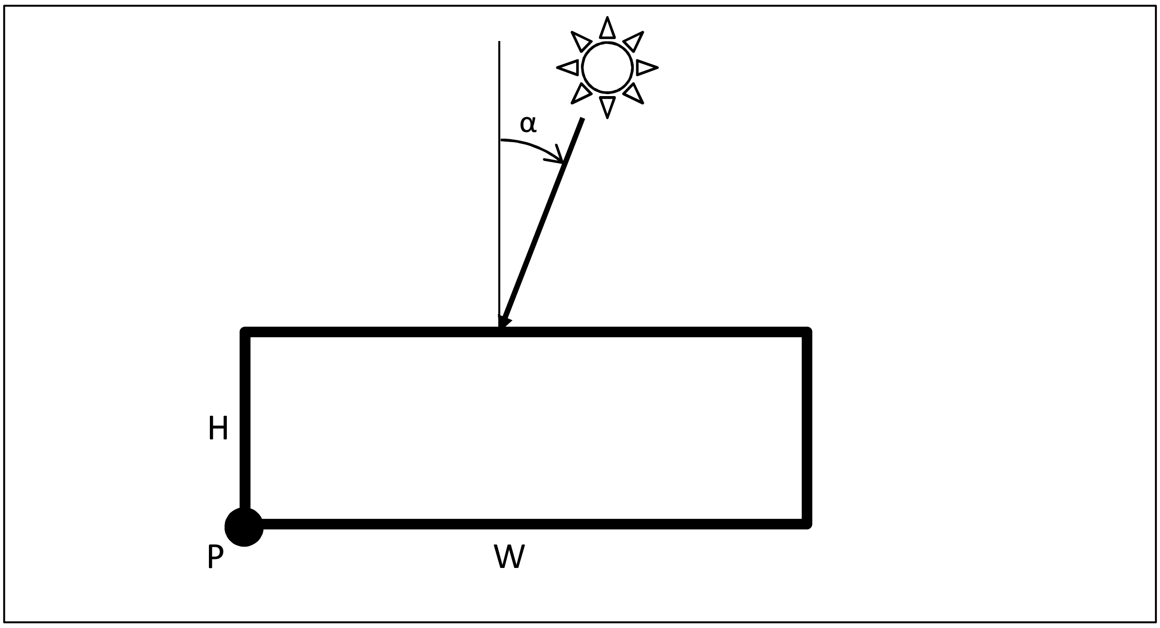
Wandelen met de klok mee

Een zonnige dag nodigt uit om een blokje te wandelen. Je kunt je dan afvragen of je een parcours met de klok mee of tegen de klok in aflegt. Je wilt immers zo veel mogelijk zonnestralen vangen terwijl je rekening houdt met de draaiing van de zon. Figuur 1 geeft schematisch de situatie weer waarbij het parcours bestaat uit een rechthoek.



Figuur 1 Geometrie van wandeling en zon

Je start in punt P en kunt er voor kiezen om eerst langs de linkerzijde met lengte H te lopen, een kwartslag te draaien en dan langs de bovenkant met lengte W verder te gaan; via de rechterkant en de onderkant kom je dan terug bij P. De snelheid *v* waarmee je wandelt veronderstellen we constant. Neem verder aan dat de zon in het vlak van de rechthoek met een constante hoeksnelheid *r* draait. Op het moment van vertrek zie je de zon onder een hoek α. Als je nu vanaf P een afstand *s* hebt afgelegd, is de zon gedraaid over een hoek $\frac{s}{v} * r$. De verhouding $\frac{r}{v}$ zal steeds terugkomen, en noemen we daarom ρ. Wanneer je recht naar de zon toe loopt vang je de volledige kracht van een zonnestraal. Omdat de zon onder een hoek staat vang je slecht een gedeelte op. Aan de linkerkant van de rechthoek is dit evenredig met de cosinus van die hoek, en aan de bovenkant met de sinus van de hoek. Bij het teruglopen staat de zon in de rug, en vang je niets. Bij elke stap ter lengte van *ds* is de zonnekracht aan de linkerkant dus evenredig met $\cos(\alpha + \rho * s) * ds$, en aan de bovenkant met $\sin(\alpha + \rho * s) * ds$. Voor het optellen van de bijdragen tijdens alle stappen gebruiken we de integraalrekening. De totale zonnekracht wordt dan:

$$Z_1 = \int_{s=0}^{H} \cos(\alpha + \rho * s) ds + \int_{s=H}^{H+W} \sin(\alpha + \rho * s) ds$$

De bovenstaande integralen kunnen we berekenen omdat de primitieve functies van de cosinus en sinus bekend zijn. We krijgen zodoende:

$$Z_1 = \frac{1}{\rho}\{\sin(\alpha + \rho * H) - \sin(\alpha) - \cos(\alpha + \rho * H + \rho * W) + \cos(\alpha + \rho * H)\}$$

Deze uitdrukking kunnen we verder herleiden door gebruik te maken van de goniometrische formules:

$$\sin p - \sin q = 2 * \cos\tfrac{1}{2}(p + q) * \sin\tfrac{1}{2}(p - q)$$

$$\cos p - \cos q = -2 * \sin\tfrac{1}{2}(p + q) * \sin\tfrac{1}{2}(p - q)$$

Het resultaat van de herleiding is:

$$Z_1 = \frac{2}{\rho}\left\{\cos\left(\alpha + \rho * \frac{H}{2}\right) * \sin\left(\rho * \frac{H}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \rho * H + \rho * \frac{W}{2}\right) * \sin\left(\rho * \frac{W}{2}\right)\right\}$$

Op eenzelfde manier bereken we de zonnekracht als we tegen de klok in wandelen. Dit geeft dan:

$$Z_2 = \frac{2}{\rho}\left\{\sin\left(\alpha + \rho * \frac{W}{2}\right) * \sin\left(\rho * \frac{W}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \rho * W + \rho * \frac{H}{2}\right) * \sin\left(\rho * \frac{H}{2}\right)\right\}$$

We trekken nu de 2 zonnekracht waardes van elkaar af om de grootste te bepalen. Na wat herleiden, wederom gebruik makend van de goniometrische formules, krijgen we:

$$Z_1 - Z_2 = \frac{2}{\rho}\left\{\sin\left(\alpha + \rho * \frac{H+W}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \rho * \frac{H+W}{2}\right)\right\} * \sin\left(\rho * \frac{H}{2}\right) * \sin\left(\rho * \frac{W}{2}\right)$$

De 4 termen in deze formule zijn alle positief, omdat ρ een klein, positief getal is. De conclusie is dus dat je meer zon vangt bij een wandeling met de klok mee. Reken zelf maar eens na dat het effect van een half uur wandelen uitkomt op een paar procent. En mocht je op het zuidelijk halfrond belanden, bedenk dat je dan beter een rondje tegen de klok in kunt wandelen.

Tis Veugen
5 augustus 2012